

Latvijas Universitāte  
Fizikas un matemātikas fakultāte  
Fizikas nodaļa

Papildinājums lekciju konspektam kursam vispārīgajā fizikā

# Elektromagnētisms

## (elektromagnētiskās indukcijas parādības)

**Asoc. prof. Andris Muižnieks**

Noformējums un grafika: Andris Muižnieks

**Rīga, 2004.**

### **Anotācija.**

Šajā konspektā tiek papildināts līdzšinējais lekciju konspekts "Elektromagnētisms" (Rīga, 2003.) ar paragrāfiem, kuros plašāk tiek aplūkotas elektromagnētiskās indukcijas parādības.

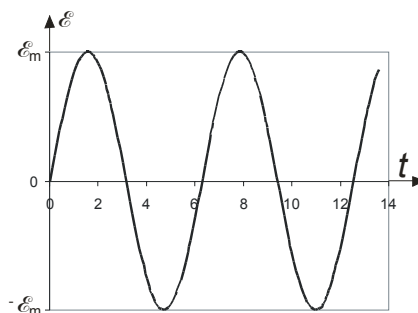
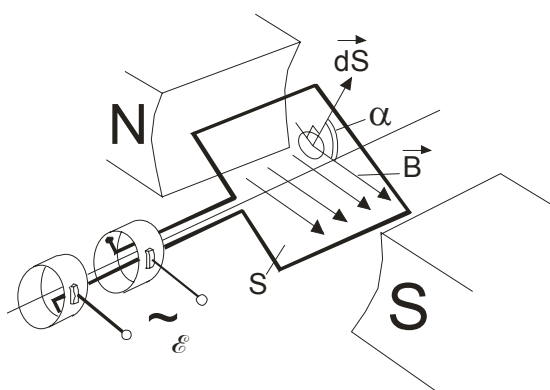
### **Saturs**

- P.1. Strāvas ģeneratori
- P.2. Virpuļains elektriskais lauks
- P.3. Virpuļstrāvas, skinefekts
- P.4. Pašindukcija
- P.5. Spole maiņstrāvas ķēdē
- P.6. Labi vadoša materiāla gredzens ārējā AC magnētiskā laukā
- P.7. Magnētiskā lauka enerģija
- P.8. Ieslēgšanas strāva
- P.9. Izslēgšanas strāva
- P.10. Magnētisko spēku darbs noslēgtam kontūram ar strāvu pārvietojoties ārējā magnētiskajā laukā
- P.11. Savstarpējā indukcija
- P.12. Transformators

## P.1. Strāvas ģeneratori

Pirms elektromagnētiskās indukcijas parādības atklāšanas cilvēce pazina galvenokārt tikai sekojošus elektriskās enerģijas iegūšanas veidus: 1) elektrizēšanu ar berzi, taču šis veids nodrošināja tikai ļoti īslaicīgus un mazjaudīgus elektriskos procesus; 2) galvaniskos (ķīmiskos) elementus - lai arī galvanisko elementu kalpošanas laiks bija ilgstošāks, taču arī tas bija ierobežots (piem., dažas stundas), pie kam ķīmisko elementu jauda bija ierobežota; 3) termopārus, kuru darbība varēja būt ļoti ilgstoša, taču kuru jauda arī bija ļoti ierobežota.

Elektromagnētiskās indukcijas parādības atklāšana ļāva izveidot speciālas ierīces (ģeneratorus) tieši mehāniskās enerģijas (jaudas) pārveidošanai elektriskajā enerģijā (jaudā), kas nodrošināja elektriskās enerģijas plašu lietošanu, t.i. elektroenerģētikas rašanos un tādejādi revolucionāri pārmainīja cilvēces dzīvi.



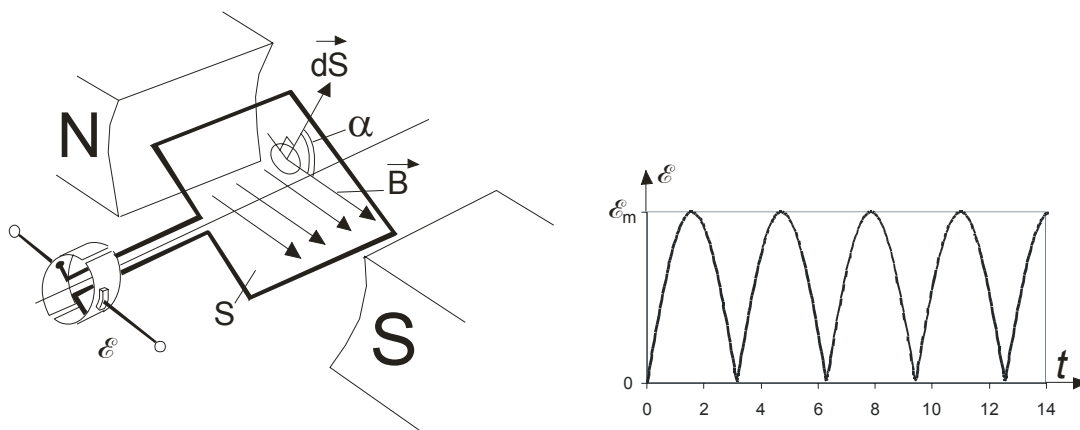
Mainstrāvas (AC - *alternating current*) ģeneratora darbības princips: ģeneratorā ar pievadītas mehāniskas jaudas palīdzību vienmērīgi tiek griezts vada rāmītis magnētiskajā laukā, ko rada nekustīgi elektromagnēti vai pastāvīgie magnēti. Rotācijas dēļ caur rāmīša laukumu laikā mainās magnētiskā lauka plūsma, kā rezultātā rāmītī inducējas EDS. Rāmīša vada gali ir pievienoti vadītāja gredzeniem, kas rotē reizē ar rāmīti. Ar slīdkontaktu palīdzību inducētais EDS tiek pievadīts nekustīgajiem ģeneratora poliem, kuriem var pieslēgt strāvas patērētāju. Pieņemot, ka magnētiskais lauks ir homogēns

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \int_S B dS \cos \alpha = BS \cos \alpha, \quad \alpha = 2\pi ft = \omega t, \quad \Phi = BS \cos \omega t,$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t) = \mathcal{E}_m \sin(\omega t), \quad \text{kur } \mathcal{E}_m = BS\omega \text{ - EDS amplitūda.}$$

Tātad uz ģeneratora poliem EDS mainās kā harmoniska laika funkcija. Eiropā elektroapgādes tīklos  $f = 50$  Hz. Praksē ģeneratoros, protams, izmanto nevis vienu rāmīti, bet tinumu konstrukciju (rotoru) ar daudziem vijumiem, pie kam šajos tinumos ievieto feromagnētiska materiāla serdi, lai pastiprinātu magnētiskā lauka indukciju. Arī tinumu skaits parasti ir lielāks par vienu, jo elektroenerģētikā izmanto trīsfāzu strāvu. Mūsdienu spēkstaciju viena ģeneratora jauda var sasniegt apmēram 1 GW.

Ja ģeneratoram patērētājs nav pieslēgts, tad strāva ģeneratora tinumos neplūst, uz tinumu vadiem magnētiskais spēks nedarbojas, un nepieciešamā mehāniskā jauda rotora griešanai ir tuvu nullei (ir jāpārvar tikai berzes spēki). Ja ģeneratoram pieslēdz patērētāju, tad tā tinumos plūst strāva, un uz vadiem darbojas magnētiskais spēks, kas ir vērsts pretēji vadu kustībai. Šī magnētiskā spēka pārvarēšanai kalpo mehāniskā jauda, kas tiek pievadīta rotoram.



Vienkāršākajā līdzstrāvas (DC - *direct current*) ģeneratorā izmanto vienu gredzenu (kolektoru), kas sastāv no diviem savstarpēji izolētiem vadītāja segmentiem, kuriem katram ir pievienots viens kontūru veidojošā vada gals. Šajā gadījumā, tad, kad rotoram griežoties, mainīsies EDS virziens, mainīsies arī vietām segmenti, kuriem pieskaras slīdkontakti. Tādejādi uz ģeneratora spailēm būs pulsējošs, bet vienmēr vienā virzienā vērsts EDS. Praksē pulsācijas novērš, izmantojot  $n$  (pat vairāk kā desmit) tinumus, kas savstarpēji ir pagriezti leņķī viens pret otru, kā arī attiecīgi novietotus  $2n$  segmentus. Līdz ar to pulsāciju dziļums būtiski samazinās.

## P.2. Virpuļains elektriskais lauks

Elektrodzinējspēks, kas darbojas kādā vadoša materiāla noslēgtā kontūrā  $L$ , cauri kuram uzstieptajai virsmai magnētiskā lauka plūsma mainās laikā, tiek aprakstīts ar Faradeja likumu

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Savukārt elektrodzinējspēks, atbilstoši tā definīcijai, ir elektromagnētiskās indukcijas parādības izraisīto spēku darbs, kas tiek veikts, ja kontūrā noslēgtu ceļu veic vienu vienību liels lādiņš. Ja kontūrā noslēgtu ceļu veic lādiņš  $q$ , tad šis EDS veic darbu

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = q\mathcal{E}, \text{ un seko, ka } \mathcal{E} = \oint_L \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l}.$$

Tātad, EDS rašanās nozīmē, ka uz elementārlādiņiem vadoša materiāla kontūrā darbojas spēks, kas ir radies EM indukcijas parādības dēļ, pie kam šis spēks ir proporcionāls lādiņa lielumam. Šī spēka raksturošanai mēs varam ievest

neelektrostatiskās dabas tā saucamo virpuļaino elektrisko lauku  $\vec{E}_V = \vec{F}/q$ , kas eksistē katrā kontūra punktā, pie kam ir spēkā

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_V d\vec{l}, \text{ un } \oint_L \vec{E}_V d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Šis virpuļainais elektriskais lauks, līdzīgi kā elektrostatiskais lauks, ļauj aprēķināt spēku (kas darbojas uz kādu lādiņu telpas punktā, kur ir  $\vec{E}_V$ ) pēc parastās formulas  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Tikai elektrostatiskajā gadījumā lauks tiek radīts tāpēc, ka tuvumā ir kādi citi lādiņi, bet elektromagnētiskās indukcijas gadījumā elektriskais lauks rodas tāpēc, ka kādā telpas daļā mainās magnētiskais lauks. Tādējādi tiek paplašināts elektriskā lauka jēdziens un turpmāk par elektrisko lauku sauc abus elektriskā lauka veidus, kā arī parasti nelieto speciālu indeksu virpuļainā lauka apzīmēšanai.

Šī virpuļainā elektriskā neelektrostatiskās dabas elektriskā lauka cirkulācija nav vienāda ar nulli, jo ir vienāda ar EDS dotajā kontūrā. Tāpēc šis lauks nav potenciāls lauks, un tā lauka līnijas ir noslēgtas. Šeit var saskatīt formālu līdzību ar cirkulācijas teorēmu magnētiskajam laukam  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S}$ .

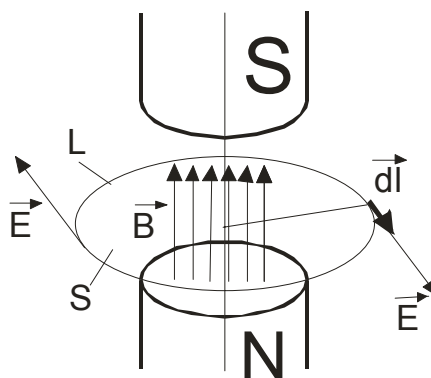
No eksperimentālajiem faktiem arī izriet, ka, lai rastos virpuļainais elektriskais lauks, nebūt nav nepieciešama vadoša materiāla noslēgta kontūra klātbūtne, proti, šis elektriskais lauks rodas telpā, ja telpā laikā mainās magnētiskais lauks.

Vispārīgā gadījumā precīza  $\vec{E}_V$  sadalījuma aprēķināšanai ir jālieto elektromagnētiskās indukcijas likuma diferenciālā forma. Tomēr simetrisku sistēmu gadījumā var aprēķināt  $\vec{E}_V$  arī izmantojot Faradeja likumu. Aplūkojam aksiāli simetrisku sistēmu

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_V d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E}_V d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad E 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}$$



Ja kontūra L vietā ir novietots gredzenveida vadītājs ar ļoti nelielu pārtraukumu, tad starp vadītāja galiem 1 un 2 būs spriegums U

$$U = \mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}_V d\vec{l}$$

Izmantojot Stoksa teorēmu iegūst:  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ . Tā kā tas ir spēkā jebkurai virsmai  $S$ , tad iegūstam elektromagnētiskās indukcijas likumu diferenciālā formā  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Acīmredzami, ka  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .

### P.3. Virpuļstrāvas, skinefekts

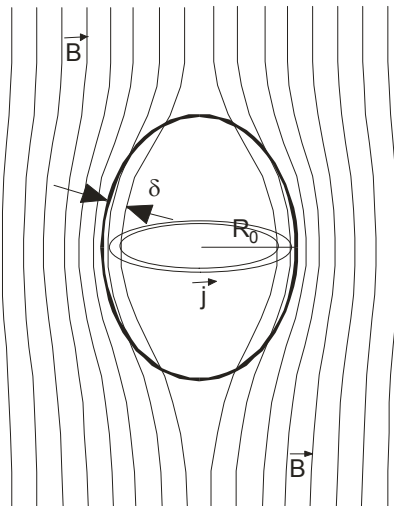
#### Virpuļstrāvas.

Ja mainīgā magnētiskā laukā, ko rada kāda spole, kurā plūst maiņstrāva (AC - *alternating current*), ko sauksim par primāro strāvu, ievieto masīvu vadošu ķermeni, tad tajā inducētais virpuļainais elektriskais lauks izraisīs sekundārās strāvas, kurām atbilstošie elektriskās strāvas tilpuma blīvuma vektori  $\vec{j}$  arī būs ar virpuļainu raksturu, un atbilstošās strāvas līnijas būs noslēgtas vadošā ķermeņa iekšpusē. Šīs strāvas mēdz saukt arī par Fuko strāvām. Bez tam, vadošais ķermenis var sajūst atgrūšanās spēku no spoles, jo augstāku frekvenču gadījumā inducētās strāvas vadošajā ķermenī kopumā ir katrā laika momentā pretēji vērstas kā strāvas spolē.

#### Skinefekts.

Tā kā inducētā strāva ir pretēja primārajai, tad tās magnētiskais lauks samazina primārās magnētisko lauku. Inducētā strāva var kļūt pat tik liela, ka tās magnētiskais lauks pilnībā kompensē primārās strāvas magnētisko lauku ķermeņa iekšpusē. Tādā gadījumā ķermenī dziļāk iekšpusē nav ne magnētiskā lauka ne strāvas, un sekundārā strāva plūst tikai šaurā slānī ķermeņa virsmas tiešā tuvumā. Šo slāni sauc par skinslāni. Rezultējošais magnētiskais lauks arī iespiežas ķermenī tikai šī skinslāņa robežās. Šo efektu sauc par skinefektu. Ja skinefekts ir stipri izteikts un vadītāja virsma ir plakana, tad skinslāņa biezuma aprēķinam var lietot formulu

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \mu \sigma f}}$$



Aplūkojam kā piemēru vara materiālu pie maiņstrāvas tīkla frekvences:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 5.8 \cdot 10^7 \cdot 50}} = 0.0093m \approx 1cm.$$

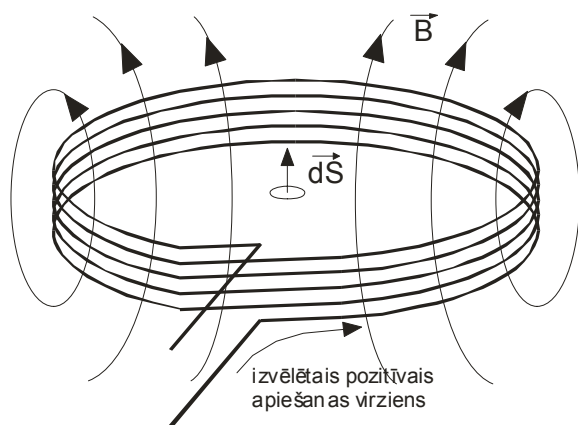
Ja skinslāņa ietvaros aplūkojam laikā vidējotu strāvas tilpuma blīvuma moduli, tad tas dilst ķermeņa iekšpusē, attālinoties no tā virsmas pēc formulas

$$j = j_{\max} \exp\left[-\frac{x}{\delta}\right].$$

Izteikts skinefekts būs tad, ja  $\delta < R_0$ .

#### P.4. Pašindukcija

Ja kādā kontūrā vai spolē plūstošā strāva laikā mainās, tad mainās arī šīs strāvas izraisītā magnētiskā lauka plūsma caur šo kontūru. Mainīgā plūsma inducē šajā kontūrā EDS, ko šajā gadījumā sauc par pašindukcijas EDS, un šo parādību sauc par pašindukciju. Kā tālāk tiek parādīts, pašindukcijas EDS ir vērsts tā, ka tas "pretojas" kontūrā plūstošās strāvas izmaiņai. Pašindukcijas gadījumā var saskatīt zināmu analogiju ar inerci mehānikā, pie kam strāvai elektromagnētismā atbilst ķermeņa impulss mehānikā.



Izvēlamies kontūra vai spoles vijumu apiešanas virzienu, piemēram, kā parādīts zīmējumā. Līdz ar to ir arī noteikts uz kontūra uzstieptās virsmas normāles virziens. Tādejādi, ja strāva, inducētais EDS un pieliktais sprieguma kritums ir vērsti apiešanas virzienā, tad tiem ir pozitīvas vērtības, ja tie ir vērsti pretēji apiešanas virzienam, tad tiem ir negatīvas vērtības. Savukārt, virsmas normāles virziens kopā ar magnētiskā lauka virzienu nosaka magnētiskās plūsmas caur kontūru zīmi.

Tā kā magnētiskais lauks ap strāvas vadu pakļaujas, piemēram, "labās rokas likumam", tad, ja strāva  $I > 0$ , tad magnētiskā lauka plūsma arī  $\Phi > 0$ . Ja kontūra tuvumā neatrodas magnētiskie materiāli, kuru relatīvā magnētiskā caurlaidība ir atkarīga no magnētiskā lauka vērtības, tad magnētiskā lauka pilnā plūsma  $\Phi_n$  (plūsmu caur atsevišķiem vijumiem algebriskā summa) ir proporcionāla strāvas vērtībai  $I$ . Proporcionalitātes koeficientu sauc par induktivitāti un apzīmē ar  $L$ , pie kam šis koeficients vienmēr ir pozitīvs

$$\Phi_n = LI.$$

Induktivitātes mērvienība:  $[L] = \left[ \frac{\Phi}{I} \right] = \frac{T \cdot m^2}{A} = \frac{Wb}{A} = H$  (henrijs).

Ja  $I$  mainās, mainās arī šīs strāvas radītā magnētiskā lauka pilnā plūsma  $\Phi_n$ , un pašindukcijas EDS  $\mathcal{E}_p$  tiek noteikts no Faradeja likuma

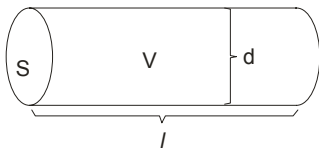
$$\mathcal{E}_p = -\frac{d\Phi_n}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

Gadījumā, ja  $L = const$ , tad

$$\mathcal{E}_p = -L \frac{dI}{dt}.$$

Tātad, ja strāvas pieaugums ir pozitīvs, piemēram, strāva ir vērsta izvēlētajā kontūra apiešanas virzienā, un tās absolūtā vērtība pieaug, t.i.  $\frac{dI}{dt} > 0$ , tad spolē inducēsies negatīvs EDS, tātad tas būs pretēji vērsts kontūra apiešanas virzienam un līdz ar to arī strāvai, tātad pašindukcijas EDS "centīsies darboties pretī" šim strāvas vērtības pieaugumam. Savukārt, ja strāva ir vērsta izvēlētajā kontūra apiešanas virzienā, un tās absolūtā vērtība samazinās, t.i.  $\frac{dI}{dt} < 0$ , tad spolē inducēsies pozitīvs pašindukcijas EDS, tātad tas būs vērsts kontūra apiešanas virzienā un līdz ar to arī strāvas virzienā, tātad "centīsies darboties pretī" šim strāvas vērtības samazinājumam.

Loti garas spoles induktivitāte.



$$B = \mu_0 \mu \frac{n}{l} I, \quad \Phi = BS, \quad \Phi_n = n\Phi = nBS = n\mu_0 \mu \frac{n}{l} IS = \mu_0 \mu \frac{n^2}{l} S \cdot I. \text{ Tātad}$$

$$L = \mu_0 \mu \frac{n^2}{l} S, \quad \text{jeb} \quad L = \mu_0 \mu \frac{n^2}{l^2} S \cdot l = \mu_0 \mu n_0^2 \cdot V,$$

kur  $n_0$  - vijumu skaits uz garuma vienību un  $V = Sl$  - spoles tilpums. Ja spole nav ļoti gara, var tikt lietota sekojoša tuvināta formula

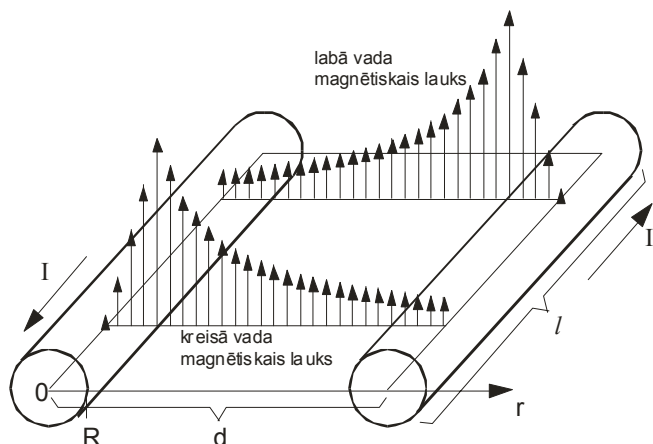
$$L = \mu_0 \mu n_0^2 \cdot V \frac{1}{1 + 0.45 \frac{d}{l}},$$

kur  $d$  un  $l$  - spoles diametrs un garums.

Gadījumā, ja spolē ir uztīts divkāršs tinums (bifilārs), proti, kam vienā virzienā ir  $n_1$  vijumi un pretējā virzienā  $n_2$  vijumi, tad spoles induktivitāte izsakās pēc formulas

$$L = \mu_0 \mu \frac{(n_1 - n_2)^2}{l} S.$$

### Divvadu līnijas induktivitāte.



Aplūkojam kreisās puses vada magnētisko lauku. Ārpus šī vada magnētiskā plūsma caur laukumu, kas ir starp šī vada virsmu un otrā vada asi, ja aplūko divvadu līnijas posmu ar garumu  $l$ , ir

$$\Phi_1 = \int_R^d \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} l \cdot dr = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \cdot \ln \frac{d}{R}.$$

Šī vada iekšpusē tā magnētiskais lauks veido plūsmu

$$\Phi_2 = \int_0^R \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R^2} l \cdot dr = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi R^2} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \frac{\mu_0 \mu I l}{4\pi}.$$

Kopējā plūsma, ņemot vērā, ka otrs vads dod tieši tādu pašu ieguldījumu

$$\Phi = 2(\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{\mu_0 \mu I l}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{R} + \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \left[ 1 + 2 \ln \frac{d}{R} \right].$$

Divvadu līnijas posma ar garumu  $l$  induktivitāte ir

$$L = \frac{\Phi}{I} = l \cdot \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \left[ 1 + 2 \ln \frac{d}{R} \right].$$

Redzams, ka ja  $R \rightarrow 0$ , tad  $L \rightarrow \infty$ .

Aplūkojam kādas telefona līnijas pilsētā piemēru.  $R = 0.2\text{mm} = 0.0002\text{m}$ ,  $d = 3\text{mm} = 0.003\text{m}$ ,  $l = 500\text{m}$ .



$$L = 500 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \left[ 1 + 2 \ln \frac{0.003}{0.0002} \right] = 10^{-4} [1 + 2 \cdot 2.708] = 6.4 \cdot 10^{-4} \text{ H} = 0.64 \mu\text{H} .$$

Pārraidot cilvēka balsi, kā raksturīgu frekvenci izvēlamies 1000Hz. Tad līnijas reaktīvā pretestība būs  $X_L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 1000 \cdot 6.4 \cdot 10^{-4} = 4.02\Omega$ .

### P.5. Spole maiņstrāvas ķēdē

Aplūkojam spoli, kurai ir pieslēgts maiņspriegums  $u$  (AC spriegums), un kuras aktīvo pretestību var neievērot. Pieņemsim, ka šajā gadījumā spolē plūst sekojoša maiņstrāva

$$i = I_0 \sin(\omega t).$$

Spolē tad inducējas pašindukcijas EDS

$$\mathcal{E}_p = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d}{dt} (I_0 \sin(\omega t)) = -LI_0 \omega \cos(\omega t).$$

Katrā laika momentā pieslēgtais maiņspriegums  $u$  ir pēc absolūtās vērtības vienāds ar pašindukcijas EDS un pretēji vērsts tam, jo tieši jau  $u$  ir tas, kas nodrošina atbilstošo strāvas izmaiņas ātrumu. Tāpēc katrā laika momentā ir spēkā

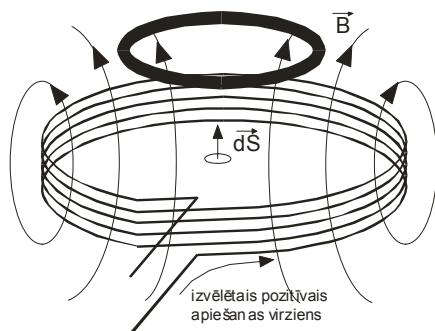
$$u = -\mathcal{E}_p, \text{ un } u = LI_0 \omega \cos(\omega t) = U_0 \cos(\omega t),$$

kur  $U_0 = I_0 L \omega$ . Spriegums uz spoles apstiedz laikā strāvu par  $90^\circ$ , jo, piemēram, pie  $t = 0$ , spriegums  $u = U_0 \cos(\omega 0) = U_0$  ir maksimāls, bet strāva  $i = I_0 \sin(\omega 0) = 0$  un tikai sāk augt. Citiem vārdiem, strāva spolē atpaliek no sprieguma par  $90^\circ$ .

Pēc analogijas ar līdzstrāvu, sprieguma un strāvas amplitūdu attiecību sauc par spoles reaktīvo pretestību maiņstrāvas ķēdei

$$X_L = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_0 L \omega}{I_0} = L \omega, \text{ tātad } X_L = L \omega, \text{ jeb } X_L = L 2\pi f .$$

### P.6. Labi vadoša materiāla gredzens arējā AC magnētiskā laukā



Ja labi vadoša materiāla noslēgtu gredzenu ievieto ārējā AC magnētiskajā laukā, ko rada kādā citā spolē plūstoša strāva

$$i_{ex} = I_{0,ex} \sin(\omega t),$$

tad gredzenā ārējā lauka plūsma mainīsies fāzē ar strāvu

$$\Phi_{ex} = \Phi_{0,ex} \sin(\omega t).$$

Šī ārējā lauka plūsma inducēs gredzenā EDS

$$\mathcal{E}_{ex} = -\frac{d\Phi_{ex}}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{0,ex} \sin(\omega t)) = -\Phi_{0,ex} \omega \cos(\omega t).$$

Varam uzskatīt, ka šis ārējā lauka izraisītais EDS ir gredzenā ieslēgts maiņsprieguma avots. Šis avots izsauks gredzenā tādu strāvu, lai tās izraisītais pašindukcijas EDS būtu katrā laika momentā pēc absolūtās vērtības vienāds un pretēji vērsts kā  $\mathcal{E}_{ex}$ , jo spriegums kritumu uz aktīvās gredzena pretestības neņemam vērā

$$\mathcal{E}_p = -\mathcal{E}_{ex} = \Phi_{0,ex} \omega \cos(\omega t).$$

Savukārt pašindukcijas EDS saistās ar strāvu gredzenā  $i_G$  sekojoši

$$\mathcal{E}_p = -L \frac{di_G}{dt}, \text{ jeb } -L \frac{di_G}{dt} = \Phi_{0,ex} \omega \cos(\omega t).$$

Integrējot iegūstam

$$i_G = -\frac{1}{L} \int \Phi_{0,ex} \omega \cos(\omega t) dt = -\frac{1}{L} \Phi_{0,ex} \sin(\omega t).$$

Redzams, ka strāva gredzenā ir pretējā fāzē kā spolē. Tā kā pretējos virzienos plūstošas strāvas atgrūžas, tad gredzens atgrūdīsies no spoles.

### P.7. Magnētiskā lauka enerģija

Aplūkojam procesu, kurā spolē, kuras induktivitāte ir  $L$ , strāva ar kāda ārēja strāvas avota palīdzību tiek palielināta no 0 līdz vērtībai  $I$ . Pieņemsim, ka kādā laika momentā  $t$  spolē plūst strāva  $i$ . Ja strāva šajā laika momentā pieaug, tad spolē inducējas pašindukcijas EDS, kas ir vērsts pretēji strāvas virzienam

$$\mathcal{E}_p = -L \frac{di}{dt}.$$

Tas nozīmē, ka ārējam strāvas avotam šajā momentā ir jānodrošina uz spoles spailēm spriegums

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Tā kā laika momentā  $t$  plūst strāva  $i$  un strāvas avots uz spoles spailēm tur spriegumu  $u$ , tad laika intervālā  $dt$  strāvas avots veic darbu

$$dA_{avots} = u \cdot dq = u \cdot i \cdot dt = L \frac{di}{dt} i \cdot dt.$$

Avota darbs palielinot strāvu spolē no 0 līdz  $I$  ir

$$A_{avots} = \int_0^I dA_{avots} = \int_0^I L \frac{di}{dt} i \cdot dt = \int_0^I Li \cdot di = \frac{Li^2}{2} \Big|_0^I = \frac{LI^2}{2}.$$

Līdzīga veidā var parādīt, ka samazinoties strāvai no  $I$  līdz 0, pašindukcijas EDS veiks tik pat lielu pozitīvu darbu, cenšoties uzturēt strāvu spolē

$$A_{EDS} = \int_I^0 dA_{EDS} = \int_I^0 \left( -L \frac{di}{dt} \right) i \cdot dt = \int_I^0 (-L)i \cdot di = -\frac{Li^2}{2} \Big|_I^0 = \frac{LI^2}{2}.$$

Tāpēc var uzskatīt, ka, ja spolē plūst strāva  $I$ , tad tajā ir uzkrāta enerģija

$$W_B = \frac{LI^2}{2}.$$

Tā kā darbs, kas strāvas avotam bija jāveic palielinot strāvu no 0 līdz  $I$ , tika veikts palielinot magnētiskā lauka plūsmu spolē, tad var uzskatīt, ka spoles enerģija ir magnētiskā lauka enerģija.

Aplūkojam ļoti garu spoli, kuras induktivitāti izsaka formula  $L = \mu_0 \mu \frac{n}{l} nS = \mu_0 \mu n^2 V$ ,

kur  $n_0$  ir vijumu skaits uz garuma vienību. Ja spolē plūst strāva  $I$ , tad magnētiskā lauka indukcija tajā sasniedz vērtību  $B = \mu_0 \mu n_0 I$ . Magnētiskā lauka enerģijas izteiksmi var pārveidot tad sekojoši

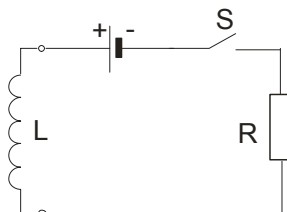
$$W_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 V I^2}{2} = \frac{(\mu_0 \mu n_0 I)^2}{\mu_0 \mu 2} V = \frac{B^2}{\mu_0 \mu 2} V.$$

Var ievest jaunu lielumu - magnētiskā lauka enerģijas tilpuma blīvumu

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \left( \frac{B}{\mu_0 \mu} \right) \frac{B}{2} = \frac{BH}{2}.$$

## P.8. Ieslēgšanas strāva

Noslēdzot slēdzi, kontūrā sāk pieaugt strāva, taču šo pieaugumu bremsē spoles induktivitāte, kuras pašindukcijas EDS darbojas pretim strāvas avota EDS. Ja ar  $R$  apzīmējam kopējo aktīvo pretestību ķēdē, tad no Oma likuma noslēgtai ķēdei seko



$$I = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p}{R}. \text{ Savukārt pašindukcijas EDS ir } \mathcal{E}_p = -L \frac{dI}{dt}, \text{ un } I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}.$$

$$\text{Iegūstam } \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}_0}{L},$$

kas ir lineārs pirmās kārtas diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem. Tā atrisinājumu meklē formā:

$I = C_1 \exp(\alpha t) + C_2$ . Tā atvasinājums pēc laika ir  $\frac{dI}{dt} = C_1 \alpha \cdot \exp(\alpha t)$ . Ievietojot diferenciālvienādojumā iegūstam

$$C_1 \alpha \cdot \exp(\alpha t) + \frac{R}{L} C_1 \cdot \exp(\alpha t) + \frac{R}{L} C_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{L}.$$

Lai šī vienādība izpildītos katram laika momentam, ir jābūt spēkā divām sakarībām:

1)  $C_1 \alpha \cdot \exp(\alpha t) + \frac{R}{L} C_1 \cdot \exp(\alpha t) = 0$ , no tā seko, ka  $\alpha = -\frac{R}{L}$ ;

2)  $\frac{R}{L} C_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{L}$ , no tā seko, ka  $C_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ .

Tātad diferenciālvienādojuma atrisinājums ir formā  $I = C_1 \exp(-\frac{R}{L} t) + \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ .

Konstanti  $C_1$  nosakām no sākuma nosacījuma. Pieņemam, ka kontakts tika noslēgts laika momentā  $t=0$ . Tanī brīdī strāva ir 0. Ievietojam šo nosacījumu atrisinājumā:

$$0 = C_1 \exp(-\frac{R}{L} \cdot 0) + \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \text{ no tā seko, ka } C_1 = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

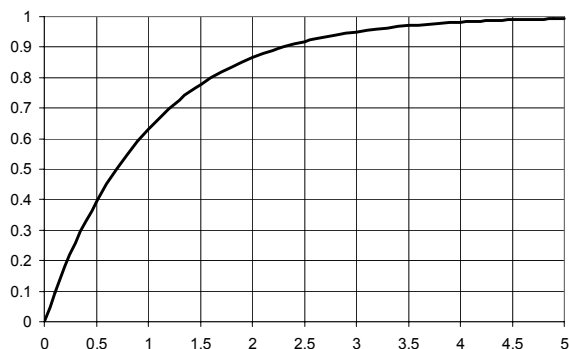
Tādejādi ieslēgšanas strāvai ir sekojoša atkarība no laika

$$I = -\frac{\mathcal{E}_0}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \text{ jeb } \boxed{I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]}.$$

Šo izteiksmi var pārrakstīt formā

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} f(\xi), \text{ kur } f(\xi) = [1 - \exp(-\xi)], \text{ un } \xi = \frac{R}{L}t.$$

Funkcijas  $f(\xi)$  izskats ir parādīts zīmējumā.

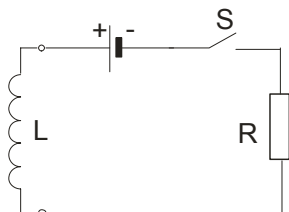


Procesa sākumā pašindukcijas EDS ir vienāds ar strāvas avota EDS, bet ir pretēji tam vērsti. Laika gaitā, strāvai pieaugot, pašindukcijas EDS samazinās līdz nullei. Tātad, ieslēgšanas strāvu gadījumā visā procesa laikā ir spēkā  $|\mathcal{E}_p| < |\mathcal{E}_0|$ .

Procesam nepieciešamo laiku raksturo ar tā saucamo relaksācijas laiku  $\tau$ . Tas ir laiks pēc ieslēgšanas brīža, kad eksponentes rādītājs sasniedz vērtību -1. Tādā gadījumā

$\frac{R}{L}\tau = 1$ , un  $\tau = \frac{L}{R}$ . Ja  $t = \tau$ , tad  $I = I_0[1 - \exp(-1)] \approx I_0[1 - 0.3679] \approx I_0 0.6321$ , proti, paejot relaksācijas laikam strāva spolē ir sasniegusi apmēram 63% no asimptotiskās vērtības.

### P.9. Izslēgšanas strāva



Izslēdzot strāvu ķēdē (t.i. atvienojot slēdža kontaktus), notiek ārkārtīgi strauja strāvas samazināšanās, proti,  $\left|\frac{dI}{dt}\right| \rightarrow \infty$ . Ja šajā ķēdē ir induktivitāte, tad pašindukcijas EDS

$|\mathcal{E}_p|$  var būt ļoti liels, pie kam šis EDS "centīsies bremsēt strāvas samazināšanos", ar gaisa caursītes (dzirkstele vai loks) palīdzību sūtot strāvu cauri gaisa slānim, kas ir izveidojies starp kontaktiem. Var notikt pat kontaktu apdegšana.

Izslēgšanas strāvu aprēķins ir būtiski sarežģītāks, jo tam ir nepieciešama informācija par pretestības pieaugšanu ļoti īsajā kontaktu atvienošanas laika intervālā. Kā rāda prakse, kontaktu atvienošanas laikā starp kontaktiem var pārlekt dzirkstele, tātad gaisa slānis var iegūt zināmu vadītspēju. Tādejādi pašindukcijas EDS var pats uz īsu brīdi samazināt pretestības pieaugumu. Tomēr ir iespējams izveidot vienkāršotu izslēgšanas strāvu modeli, kas ļauj novērtēt būtiskākos procesu raksturojošos lielumus.

Pieņemsim, ka laika momentā  $t=0$  tiek izslēgts slēdzis. Izslēgšanas procesu modelējam ar lineāru un strauju slēdža pretestības pieaugumu strāvas ķēdei

$$R = At.$$

Tādā gadījumā strāvu ķēdē nosaka sakarība  $I = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_p}{R + At}$ , jeb  $I = \frac{\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt}}{R + At}$ .

Aplūkojam gadījumu, kad  $\mathcal{E}_0$  un  $R$  salīdzinoši mazi, tad

$$I = -\frac{L}{At} \frac{dI}{dt}, \text{ jeb } \frac{dI}{dt} = -\frac{A}{L} It.$$

Tas ir lineārs homogēns pirmās kārtas diferenciālvienādojums, taču tā koeficients nav konstants. Atrisinājumu meklējam formā

$$I = I_0 \exp(\alpha t^2).$$

Šīs izteiksmes atvasinājums:  $\frac{dI}{dt} = I_0 \exp(\alpha t^2) \cdot \alpha 2t$ . Ievietojot diferenciālvienādojumā, iegūst

$$I_0 \exp(\alpha t^2) \cdot \alpha 2t = -\frac{A}{L} t \cdot I_0 \exp(\alpha t^2), \text{ tātad seko, ka } \alpha = -\frac{A}{2L}.$$

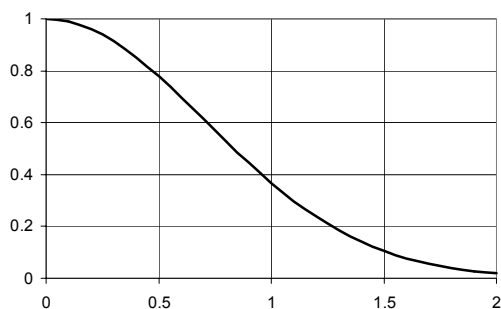
Tātad diferenciālvienādojuma atrisinājums ir

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{A}{2L} t^2\right).$$

Ja to pieraksta normētā formā:

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\left(t \cdot \sqrt{\frac{A}{2L}}\right)^2\right),$$

tad atrisinājuma izskats ir tāds kā sekojošajā zīmējumā. Redzams, ka strāva no sākotnējās vērtības  $I_0$  monotoni nokrīt līdz nullei.



Pašindukcijas EDS nosaka sekojoši:  $\mathcal{E}_p = -L \frac{dI}{dt}$ ,

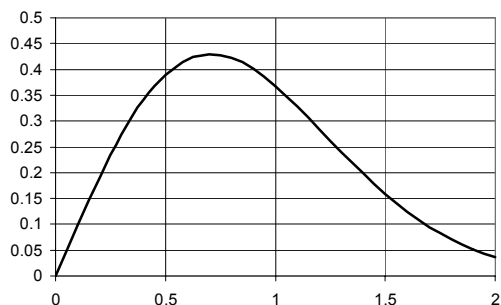
$$\mathcal{E}_p = -L \frac{d}{dt} \left[ I_0 \exp\left(-\frac{A}{2L} t^2\right) \right], \quad \mathcal{E}_p = LI_0 \frac{A}{2L} \exp\left(-\frac{A}{2L} t^2\right) 2t, \text{ un iegūstam}$$

$\mathcal{E}_p = I_0 A t \cdot \exp\left(-\frac{A}{2L} t^2\right)$ . Šo izteiksmi var pārrakstīt formā

$$\mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0} A \sqrt{\frac{2L}{A}} \left( t \cdot \sqrt{\frac{A}{2L}} \right) \cdot \exp\left(-\left(t \cdot \sqrt{\frac{A}{2L}}\right)^2\right), \text{ vai}$$

$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{2LA}{R_0^2}} \cdot f(\xi)$ , kur  $f(\xi) = (\xi) \cdot \exp(-\xi^2)$ , un  $\xi = t \cdot \sqrt{\frac{A}{2L}}$ . Funkcija  $f(\xi)$  ir parādīta attēlā. Pašindukcijas EDS maksimālā vērtība ir

$$\mathcal{E}_{p,\max} \approx \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{2LA}{R_0^2}} \cdot 0.429 .$$



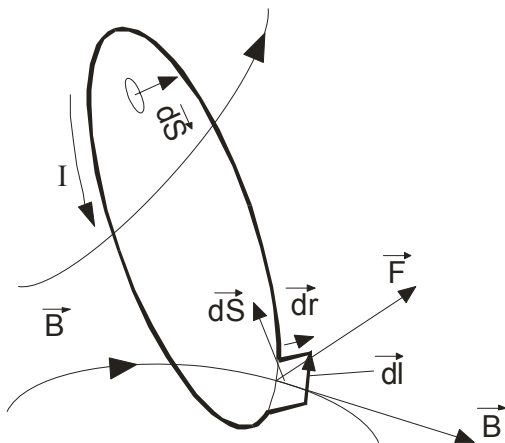
Aplūkojam piemēru. Pieņemsim, ka  $\mathcal{E}_0 = 1 \text{ V}$ ,  $R_0 = 10 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  (samērā liela spole), un ka kontakts tiek pārtraukts 0.1 s laikā palielinot pretestību līdz  $1 \text{ M}\Omega$ . Tādā gadījumā  $A = 1e7$  un

$$\mathcal{E}_{p,\max} \approx 0.429 \cdot \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{2LA}{R_0^2}} \approx 0.429 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 10^7}{10^2}} \approx 0.429 \cdot 447.2 \approx 192 \text{ V}.$$

Redzams, ka maksimālā pašindukcijas EDS vērtība gandrīz 200 reizu pārsniedz ķēdē ieslēgtā galvaniskā elementa EDS.

### P.10. Magnētisko spēku darbs noslēgtam kontūram ar strāvu pārvietojoties ārējā magnētiskajā laukā

Aplūkojam gadījumu, kad laikā nemainīgā ārējā magnētiskā laukā atrodas strāvas kontūrs, pa kuru plūst laikā nemainīga strāva  $I$ . Pieļaujam, ka kontūrs var tikt pagriezts, stiepts vai kā citādi nepārtraukti deformēts. Aplūkojam elementāru kontūra posmu  $\vec{dl}$ , kas deformācijas, rotācijas vai pārvietojuma rezultātā tiek pārvietots par elementāru pārvietojumu  $\vec{dr}$ .



Magnētisko spēku, kas darbojas uz šo posmu, veiktais elementārais darbs ir

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{dr} = I \left[ \vec{dl} \times \vec{B} \right] \cdot \vec{dr} = I \left[ \vec{dr} \times \vec{dl} \right] \cdot \vec{B} = I \vec{B} \cdot \vec{dS} = I \cdot d\Phi,$$

kur  $d\Phi$  ir magnētiskā lauka plūsmas izmaiņa (pieaugums).

Ja aplūkojam visus kontūra posmus un bez tam kontūrs tiek deformēts ar galīgu izmēra deformāciju, tad magnētiskā lauka plūsma caur to mainās par galīgu lielumu  $\Delta\Phi$ . Magnētiskie spēki, kas darbojas uz kontūru veiks rezultējošu darbu

$$A = I \cdot \Delta\Phi.$$

Ja ārējais magnētiskais lauks un strāva kontūrā laikā nemainās, tad var kontūram magnētiskajā laukā ievest potenciālās enerģijas  $W_M$  jēdzienu. Ja kontūra deformēšanās, rotācijas vai pārvietošanās rezultātā kontūrs no stāvokļa 1 nonāk stāvoklī 2 un  $W_M$  mainās, tad magnētiskie spēki pastrādā rezultējošu darbu

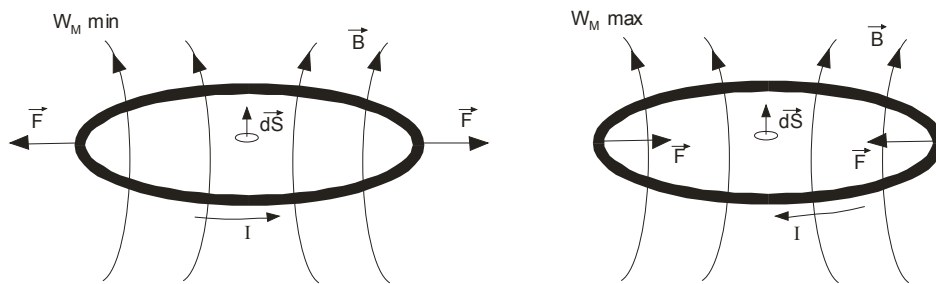


$$A_{1 \rightarrow 2} = W_{M,1} - W_{M,2},$$

kur  $W_M = -I \cdot \Phi$ .

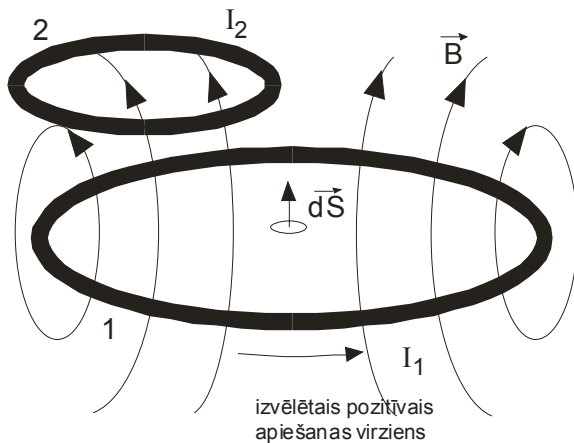
Ja kontūram pārvietojoties plūsma caur to pieaug, tad potenciālā enerģija samazinās, un magnētiskie spēki veic pozitīvu darbu. Ir jāuzsver, ka, aprēķinot magnētiskā lauka plūsmu, ir jāizvēlas tas uz kontūra uzstieptās virsmas normāles virziens, kas atbilst tādām kontūra apiešanas virzienam, kurā kontūrā plūst strāva  $I$ .

Piemēri ar maksimālu un minimālu  $W_M$



Kreisajā attēlā esošo gredzenu ārējais magnētiskais lauks centīsies vilkt tanī virzienā, kur ārējais magnētiskais lauks paliek stiprāks. Labajā attēlā esošo gredzenu magnētiskais lauks centīsies izgrūst no lauka.

### P.11. Savstarpējā indukcija



Pirmajā kontūrā plūstošā strāva  $I_1$  izraisa magnētiskā lauka plūsmu  $\Phi_{21}$  caur otro kontūru. Ja palūkotajā sistēmā nav magnētisku materiālu ar mainīgu relatīvo permeabilitāti, tad ir spēkā lineāra sakarība

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1,$$

kur  $M_{21}$  - ir savstarpējās indukcijas koeficients jeb savstarpējā induktivitāte. Savukārt otrajā kontūrā plūstošā strāva  $I_2$  izraisa magnētiskā lauka plūsmu  $\Phi_{12}$  caur pirmo kontūru. Analogiski var rakstīt

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2.$$

Var pierādīt (aplūkojot kontūru savstarpējo attālināšanos), ka vienmēr ir spēkā  $M_{12} = M_{21}$ , tāpēc var lietot vienu apzīmējumu  $M$ .

Laikā mainīgu strāvu gadījumā kontūros inducēsies EDS

$$\mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt},$$

$$\mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}.$$

Ja abi kontūri ir spoles, kas ir uztītas uz kopējas toroidālas feromagnētiķa serdes, kuras šķērsriezuma laukums ir  $S$  un kopgarums ir  $l$ , tad iegūstam plūsmai gredzenā

$$\Phi_1 = \mu_0 \mu \frac{n_1}{l} I_1 S.$$

Pilnā plūsma otrajā spolē ir

$$\Phi_{21} = \Phi_1 n_2 = \mu_0 \mu \frac{n_1 n_2 S}{l} I_1, \text{ un } M = \mu_0 \mu \cdot n_1 n_2 \frac{S}{l}.$$

Analoģiski  $\Phi_{12} = M \cdot I_2$ .

## P.12. Transformators

Primārais un sekundārais tinums.

Enerģijas pārnese.

Spriegumu un strāvu transformēšana.

Efektīva elektroenerģijas pārvade - augsta sprieguma izmantošana būtiski palielina pārvades līnijas lietderības koeficientu.

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_p = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

$$I_1 = \frac{U_1 + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_1}{R_1} = \frac{U_1 - L \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}}{R_1}$$

kur  $R_1$  - omiskā pirmā tinuma pretestība.

$$U_1 = I_1 R_1 + L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

Ja  $I_2 = 0$ , un ja  $R_1 \rightarrow 0$ , tad  $U_1 \approx L \frac{dI_1}{dt}$ , un  $U_2 = \mathcal{E}_2$ .

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \left| \frac{\mathcal{E}_2}{U_1} \right| = \left| \frac{M \frac{dI_1}{dt}}{L \frac{dI_1}{dt}} \right| = \left| \frac{M}{L} \right|$$

Toroidālam transformatoram

$$\left| \frac{M}{L_1} \right| = \frac{\mu_0 \mu \cdot n_1 n_2 \frac{S}{l}}{\mu_0 \mu \cdot n_1 \frac{S}{l}} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ t\u0101p\u0113c } \left| \frac{U_2}{U_1} \right| \approx \frac{n_2}{n_1}$$

Ja  $n_2 > n_1$  - spriegumu paaugstino\u0161s transformators.

Ja lietder\u012bbas koeficients  $\eta \approx 1$ , tad  $I_1 U_1 \approx I_2 U_2$  un seko, ka  $\left| \frac{I_1}{I_2} \right| \approx \frac{n_2}{n_1}$ .

$$\eta = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1} = \frac{I_2 U_2}{I_2 U_2 + N_S + N_H + N_F + N_S}$$

$N_R$  - siltuma jauda, kas izdal\u0105s tinumos to akt\u012bv\u0105s pretest\u012bbas d\u0113\u0137.

$N_H$  - siltuma jauda, kas izdal\u0105s serd\u0113 p\u0101rmagnetiz\u0113jot magn\u0113ti\u0137i hister\u0113zes d\u0113\u0137.

$N_F$  - siltuma jauda, kas izdal\u0105s serd\u0113 Fuko str\u0101vu d\u0113\u0137.

$N_S$  - jaudas zudumi elektromagn\u0113tisk\u0101 starojuma d\u0113\u0137.