

11. Lekcija – Lineārs operators

Šajā lekcijā tiek aplūkoti lineāra operatora definīcija, piemēri, lineāra operatora matrica, darbības ar lineāriem operatoriem, inversais operators, sakarība starp lineāra operatora matricām dažādās lineāras telpas bāzes.

Neskatoties uz to, ka funkcijas jēdziens ir viens no matemātikas pamatjēdzieniem un tās simbols ir visbiežāk lietotais matemātikas simbols, tomēr dažādās matemātikas nozarēs funkcijas jēdziena apzīmēšanai lieto dažādus terminus. Matemātiskajā analīzē to vienkārši sauc par funkciju vai attēlojumu, funkcionālajā analīzē par – operatoru, variāciju rēķinos – par funkcionāli, lineārajā algebrā – par operatoru. Katrā no iepriekš minētajiem gadījumiem ir dažādas funkcijas definīcijas kopas un vērtību kopas struktūras, bet attēlojuma jēga nemainās. Šajā lekcijā funkcija tiek nosaukta par operatoru. No visiem iespējamiem operatoru veidiem apskata tikai vienu – lineāro operatoru – vairākargumentu lineāru vektorfunkciju.

11.1. Pamatjēdzieni un piemēri

Pieņemsim, ka dotas divas lineāras telpas $\mathbf{K}$ un $\mathbf{W}$.

1. Definīcija.

Par **operatoru**, kurš attēlo lineāro telpu $\mathbf{K}$ lineārajā telpā $\mathbf{W}$, sauc atbilstību

$$\hat{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{W},$$

kura katram vektoram $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{K}$ piekārto tikai vienu vektoru $\mathbf{y} \in \mathbf{W}$.

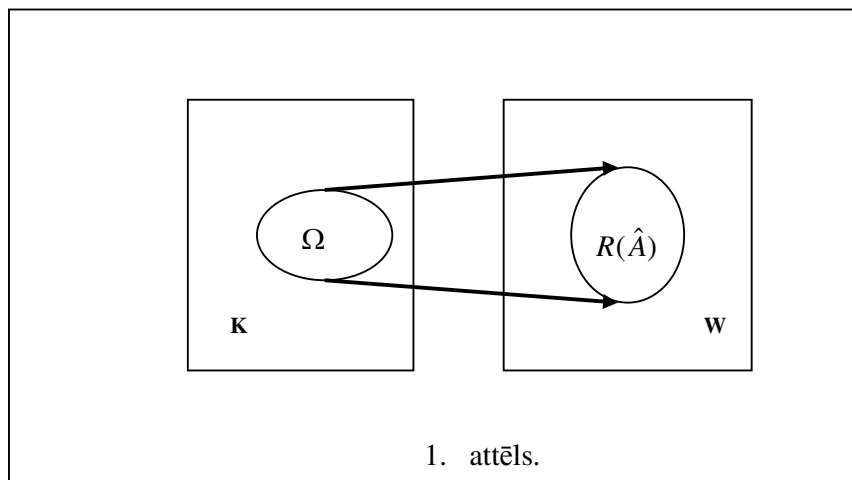
Kopas $\mathbf{K}$ apakškopu Ω sauc par **operatora definīcijas apgabalu**. Vektoru $\mathbf{y} = \hat{A}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}$ sauc par vektora $\mathbf{x}$ **attēlu**, bet vektoru $\mathbf{x}$ – par vektora $\hat{A}(\mathbf{x})$ **pirmattēlu** vai **oriģinālu**. Matemātikā operatorus mēdz apzīmēt ar latīņu alfabēta lielajiem sākuma burtiem, bet fizikā parasti virs operatora simbola liek jumtiņu. Lineārajā algebrā, ja tas nerada pārpratumus, pieraksta $\mathbf{y} = \hat{A}(\mathbf{x})$ vietā lieto apzīmējumu $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x}$ (bez apaļajām iekavām). Bieži lietotais apzīmējums $\mathbf{x} \mapsto \hat{A}\mathbf{x}$ norāda, ka vektoram $\mathbf{x}$ tiek piekārtots vektors $\hat{A}\mathbf{x}$.

2. Definīcija.

Par operatora $\hat{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{W}$ **attēlu** sauc kopu

$$R(\hat{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{W} \mid \exists \mathbf{x} \in \Omega : \hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\}.$$

Operatora $\hat{A}$ attēlu mēdz apzīmēt arī ar simbolu $\text{im } \hat{A}$ (sk. 1. att.).



3. Definīcija.

Par operatora $\hat{A} : \Omega \rightarrow \mathbf{W}$ **kodolu** sauc kopu

$$\text{Ker } \hat{A} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \hat{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{W}\}.$$

Tātad operatora kodolu veido visi tie vektori $\mathbf{x} \in \Omega$, kurus operators $\hat{A}$ attēlo par nulles vektoru.

4. Definīcija.

Divus operatorus $\hat{A}$ un $\hat{B}$ sauc par **vienādiem**, ja to definīciju apgabali sakrīt un katram vektoram $\mathbf{x} \in \Omega$ izpildās vienādība

$$\hat{A} \mathbf{x} = \hat{B} \mathbf{x}.$$

Apzīmējums: $\hat{A} = \hat{B}$.

Definīcija norāda, ka divi operatori ir vienādi, ja jebkuram vektoram $\mathbf{x} \in \Omega$ abos gadījumos tiek piekārtots viens un tas pats vektors, t.i., vektora attēli sakrīt. Tā tiek definēta arī divu funkciju vienādība.

Turpmāk no visu iespējamo operatoru kopas izdalīsim un aplūkosim tikai vienu, pašu svarīgāko apakškopu – lineārus operatorus.

5. Definīcija.

Operatoru $\hat{A} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{W}$ sauc par lineāru operatoru, ja $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{K}$ un $\forall$ skaitlim α un β ir spēkā vienādība

$$\hat{A}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \hat{A} \mathbf{x} + \beta \hat{A} \mathbf{y}.$$

Visu to lineāro operatoru kopu, kuri lineāro telpu $\mathbf{K}$ attēlo lineārajā telpā $\mathbf{W}$, apzīmēsim ar simbolu $L(\mathbf{K}, \mathbf{W})$.

No lineārā operatora definīcijas seko operatora $\hat{A}$ **linearitātes nepieciešamais nosacījums**:

$$\hat{A} \mathbf{O}_K = \mathbf{O}_W,$$

kur $\mathbf{O}_K$ un $\mathbf{O}_W$ ir telpu $\mathbf{K}$ un $\mathbf{W}$ nulles vektori. Tātad lineārs operators nulles vektoru vienmēr attēlo par nulles vektoru.

Operatoru $\hat{A}$ sauc par funkcionāli, ja $\mathbf{W} = \mathbf{R}$ vai $\mathbf{W} = \mathbf{C}$. Ja $\hat{A}$ ir lineārs funkcionālis un telpas $\mathbf{K}$ dimensija ir galīga, tad operatoru $\hat{A}$ sauc par **lineāru formu**.

Aplūkosim dažus speciālus lineāru operatoru veidus.

1. Piemērs.

Lineāru operatoru, kurš katram vektoram $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ piekārto $\mathbf{O} \in \mathbf{W}$, sauc par **nulles operatoru** un apzīmē ar simbolu $\hat{O} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{W}$. Skaidrs, ka $\text{Ker } \hat{O} = \mathbf{K}$.

2. Piemērs.

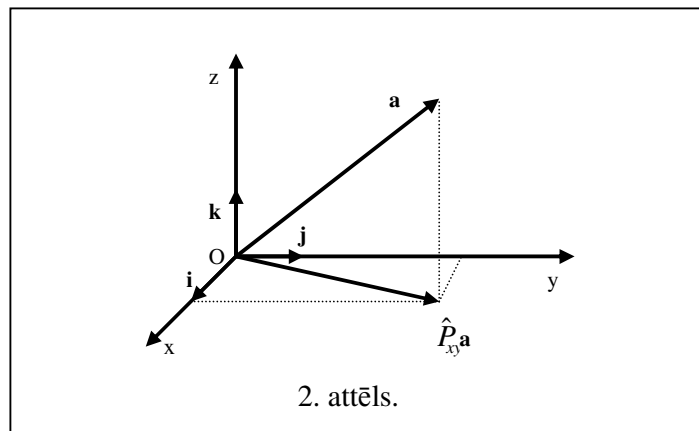
Operatoru $\hat{E} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$, kurš $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}$ piekārto šo pašu vektoru, sauc par **identitātes** jeb **vienības** operatoru.

3. Piemērs.

Lineārā telpā $\mathbf{K} = \mathbf{W} = \mathbf{R}^1$ funkcija $f(x) = kx$ ir lineārs operators. Jāievēro, ka tai pašā laikā lineārā funkcija $f(x) = kx+b$, kur $b \neq 0$, nav lineārs operators, jo neizpildās nosacījums $f(0) = 0$. Pēdējais piemērs rāda, ka pāreja uz lineāriem operatoriem ir būtisks ierobežojums.

4. Piemērs.

Aplūkosim operatoru $\hat{P}_{xy} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$, kurš katram vektoram $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ piekārto vektoru $\hat{P}_{xy} \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ (sk. 2. att.):



Šajā gadījumā $\mathbf{K} = \mathbf{W} = \mathbf{V}^3$ ir ģeometrisku vektoru telpa, bet operators $\hat{P}_{xy}$ projicē katru telpas vektoru $\mathbf{a}$ uz xOy plakni, pie kam $\text{Ker } \hat{P}_{xy} = L(\{\mathbf{k}\})$ un

$R(\hat{P}) = L(\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$, kur $L(\{\mathbf{k}\})$ un $L(\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ ir atbilstošo vektoru sistēmu $\{\mathbf{k}\}$ un $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ lineāras čaulas.

Operators $\hat{P}_{xy}$ ir lineārs, jo

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = (\alpha a_x + \beta b_x)\mathbf{i} + (\alpha a_y + \beta b_y)\mathbf{j} + (\alpha a_z + \beta b_z)\mathbf{k}$$

un

$$\hat{P}_{xy}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = (\alpha a_x + \beta b_x)\mathbf{i} + (\alpha a_y + \beta b_y)\mathbf{j} = \alpha(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}) + \beta(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}) = \alpha \hat{P}_{xy} \mathbf{a} + \beta \hat{P}_{xy} \mathbf{b}.$$

5. Piemērs.

Aplūkosim polinomus, kuru pakāpe nepārsniedz n , un šo polinomu telpu $\mathbf{P}_n$. Ja $\mathbf{K} = \mathbf{P}_n$, bet $\mathbf{W} = \mathbf{P}_{n-1}$, tad, balstoties uz atvasināšanas īpašībām, varam apgalvot, ka diferenciācijas operācija

$$\hat{D} = \frac{d}{dt} : \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_{n-1}$$

ir lineārs operators.

6. Piemērs.

Operators l , kurš katrai funkcijai $f(x) \in \mathbf{C}([a; b])$ piekārto skaitli $l(f)$ pēc likuma

$$l : f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx,$$

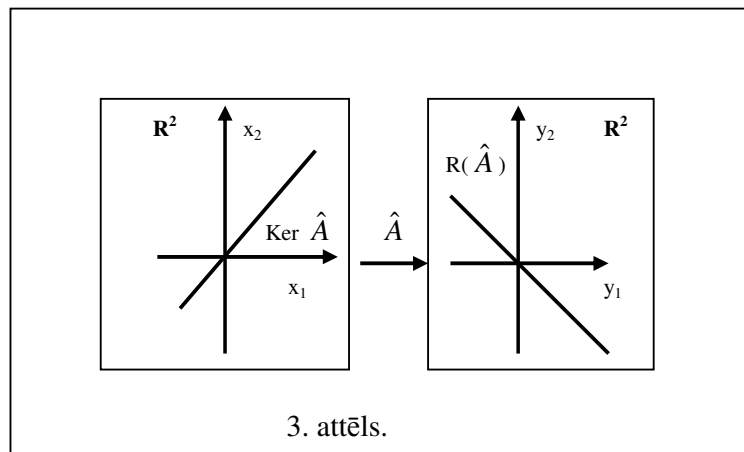
acīmredzot, ir lineārs funkcionālis.

7. Piemērs.

Aplūkosim tādu operatoru $\hat{A} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, ka

$$\hat{A} \mathbf{x} = (x_1 - x_2, x_2 - x_1) = \mathbf{y},$$

kur $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1; y_2) \in \mathbf{R}^2$. Nav grūti pārliecināties, ka operators $\hat{A}$ ir lineārs operators. Telpas $\mathbf{R}^2$ attēls $R(\hat{A})$ ir „taisne”, kuras vienādojums ir $y_2 = -y_1$ (sk. 3.att.).



Operatora $\hat{A}$ kodols $\text{Ker } \hat{A}$ ir „taisne”, kuras vienādojums ir $x_2 = x_1$, jo no operatora kodola definīcijas seko, ka

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \end{cases}.$$

Tātad par telpas $\mathbf{R}^2$ nulles vektoru attēlojas visi tie vektori $\mathbf{x}$, kuru abas koordinātas ir vienādas.

Piezīme.

Turpmāk aplūkosim tikai lineārus operatorus $\hat{A}: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$, kad $\mathbf{K}$ ir galīgas dimensijas lineāra telpa ($\hat{A} \in L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$). Atzīmēsim tikai, ka operatori, kuri darbojas telpās ar bezgalīgu dimensiju, tiek pētīti funkcionālās analīzes kursā.

11.2. Lineāra operatora matrica

Lineāru operatoru, kā jebkuru funkciju, var uzdot analītiski, norādot piekārtojuma likumu formulas $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ veidā (sk. 7. piemēru). Tai pašā laikā ērtāk ir izmantot lineāra operatora matricu. Jāatzīmē, ka galīgas dimensijas telpā lineāru operatoru pilnībā var noteikt ar galīga skaita pareizi izvēlētu vektoru attēlu sistēmu. Pievērsīsimies šā jautājuma izskaidrošanai.

Aplūkosim lineāru operatoru $\hat{A}: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$, $\dim \mathbf{K} = n$. Telpā $\mathbf{K}$ izvēlēsimies kādu bāzi $F = \{ \mathbf{f}_j \}_{j=1}^n$ un kādu patvaļīgu vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$. Šo vektoru var viennozīmīgi izteikt kā bāzes vektoru lineāru kombināciju

$$\mathbf{X} = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \dots + x_n \mathbf{f}_n.$$

Ja operators $\hat{A}$ ir lineārs un $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, tad

$$\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x} = x_1 \hat{A}\mathbf{f}_1 + x_2 \hat{A}\mathbf{f}_2 + \dots + x_n \hat{A}\mathbf{f}_n. \quad (11.1)$$

Tātad fiksētā bāzē F vektora $\mathbf{x}$ attēls tiek viennozīmīgi noteikts ar vektora $\mathbf{x}$ koordinātām un bāzes vektoru $\mathbf{f}_j$ attēliem $\hat{A}\mathbf{f}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Tādējādi operatoru $\hat{A}$ var noteikt, ja zināmi bāzes vektoru attēli.

Tā kā katrs vektors $\hat{A}\mathbf{f}_j \in \mathbf{K}$, tad tos arī var izteikt kā bāzes F vektoru lineāru kombināciju:

$$\hat{A}\mathbf{f}_j = a_{1j}\mathbf{f}_1 + a_{2j}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{nj}\mathbf{f}_n, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11.2)$$

jeb koordinātu formā

$$\hat{A}\mathbf{f}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}). \quad (11.3)$$

6. Definīcija.

Par **lineāra operatora** $\hat{A} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$, $\dim \mathbf{K} = n$, **matricu** bāzē $F = \{ \mathbf{f}_j \}_1^n$ sauc $n -$ tās kārtas kvadrātisku matricu

$$A_F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kuras kolonnas veido bāzes F vektoru $\mathbf{f}_j$ attēlu $\hat{A} \mathbf{f}_j$ koordinātas bāzē F .

Gadījumos, kad nevar rasties pārpratumi, operatora matricu A_F var apzīmēt vienkārši ar A .

8. Piemērs.

Aplūkosim operatoru $\hat{A} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, kurš uzdots ar formulu $\hat{A} \mathbf{x} = \hat{A}(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2; x_1 - 3x_2 - x_3; x_2)$, ja $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbf{R}^3$. Atradīsim šī operatora matricu.

Izvēloties telpā $\mathbf{R}^3$ kanonisko bāzi $E = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3\}$, atradīsim šo bāzes vektoru attēlus:

$$\begin{aligned} \hat{A} \mathbf{e}_1 &= \hat{A}(1; 0; 0) = (2; 1; 0), \\ \hat{A} \mathbf{e}_2 &= \hat{A}(0; 1; 0) = (1; -3; 1), \\ \hat{A} \mathbf{e}_3 &= \hat{A}(0; 0; 1) = (0; -1; 0). \end{aligned}$$

Vektoru $\hat{A} \mathbf{e}_j$ koordinātas veido operatora $\hat{A}$ matricu

$$A_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bāzē E .

9. Piemērs.

Tā kā 1. piemērā definētais nulles operators $\hat{O} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ katram vektoram $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ piekārto nulles vektoru $\mathbf{O} \in \mathbf{K}$, tad šī operatora matrica jebkurā bāzē F ir nulles matrica.

10. Piemērs.

Identitātes operators $\hat{E} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$, kurš $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}$ piekārto to pašu vektoru $\mathbf{x}$, t.i.,

$$\hat{E} \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

telpas $\mathbf{K}$ patvaļīgas bāzes $F = \{ \mathbf{f}_j \}_1^n$ vektorus attēlo sekojoši

$$\begin{aligned}\hat{E} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_1 = (1; 0; 0; \dots; 0), \\ \hat{E} \mathbf{f}_2 &= \mathbf{f}_2 = (0; 1; 0; \dots; 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{E} \mathbf{f}_n &= \mathbf{f}_n = (0; 0; 0; \dots; 1).\end{aligned}$$

Tādējādi identitātes operatora $\hat{E}$ matrica E_F jebkurā bāzē ir $(n \times n)$ vienības matrica E_n .

11. Piemērs.

Ja $\hat{P}_{xy} \in L(\mathbf{V}^3, \mathbf{V}^3)$ ir 4. piemērā definētais ortogonālās projekcijas operators (uz xOy plakni), tad telpas $\mathbf{V}^3$ kanoniskās bāzes $E = \{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ vektorus tas attēlo sekojoši

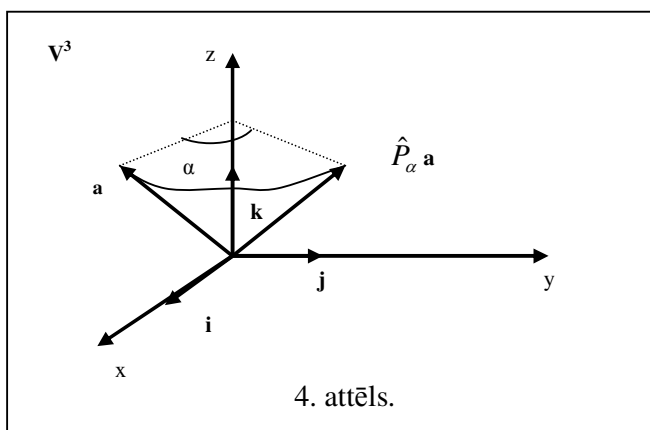
$$\begin{aligned}\hat{P}_{xy} \mathbf{i} &= \mathbf{i} = (1; 0; 0), \\ \hat{P}_{xy} \mathbf{j} &= \mathbf{j} = (0; 1; 0), \\ \hat{P}_{xy} \mathbf{k} &= \mathbf{O} = (0; 0; 0).\end{aligned}$$

Šajā gadījumā operatora $\hat{P}_{xy}$ matrica bāzē E ir matrica

$$\hat{P}_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Piemērs.

Šoreiz telpā $\mathbf{V}^3$ izvēlamies kanonisko bāzi $E = \{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$ un apskatīsim operatoru $\hat{P}_\alpha$, kurš pagriež telpu $\mathbf{V}^3$ ap vektoru $\mathbf{k}$ par leņķi α (sk. 4. att.).



Nav grūti pārliecināties, ka operators $\hat{P}_\alpha$ ir lineārs operators, tādēļ atradīsim šī operatora matricu kanoniskā bāzē $E = \{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$.

Tā kā

$$\begin{aligned}\hat{P}_\alpha \mathbf{i} &= \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} = (\cos \alpha; \sin \alpha; 0), \\ \hat{P}_\alpha \mathbf{j} &= -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j} = (-\sin \alpha; \cos \alpha; 0), \\ \hat{P}_\alpha \mathbf{k} &= \mathbf{k} = (0; 0; 1),\end{aligned}$$

tad

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Piezīme.

Ja vektora $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ uzdošanai pietiek ar n koordinātām, tad lineārais operators $\hat{A} \in L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$, būdams sarežģītāks objekts, bāzē F raksturojas jau ar n^2 skaitļiem, kuri var tikt uzskatīti par šā objekta koordinātām.

11.3. Vektora attēla atrašana

Noskaidrosim, kā atrast patvaļīga vektora attēlu, izmantojot operatora matricu.

Ja $\mathbf{y} = \hat{A} \mathbf{x}$ un telpā $\mathbf{K}$ ir dota bāze $F = \{\mathbf{f}_j\}_1^n$, tad vektorus $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$ var izteikt kā bāzes vektoru lineāru kombināciju

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \dots + x_n \mathbf{f}_n = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{f}_j, \\ \mathbf{y} &= y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 + \dots + y_n \mathbf{f}_n = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{f}_i.\end{aligned}$$

Ievērojot operatora $\hat{A}$ linearitāti un sakarību (11.2), iegūstam

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{f}_i = \hat{A} \mathbf{x} = \hat{A} \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{f}_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \hat{A} \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{f}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{f}_i.\end{aligned}$$

Tā kā vektora koordinātas dotā bāzē ir noteiktas viennozīmīgi, tad vektora $\mathbf{y}$ koordinātas bāzē F ar oriģināla $\mathbf{x}$ koordinātām saista sakarība

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jeb

$$\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots &\dots \dots\dots \dots \dots\dots \dots \dots \dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (11.4)$$

Pārrakstot pēdējo sakarību matricu formā, atrodam **formulu vektora attēla aprēķināšanai**.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_F \mathbf{X}. \quad (11.5)$$

Secinājums.

Ja zināma vektora $\mathbf{x}$ koordinātu kolonnas matrica X bāzē F un operatora $\hat{A}$ matrica A_F tajā pašā bāzē, tad vektora $\mathbf{x}$ attēla $\mathbf{y} = \hat{A} \mathbf{x}$ koordinātu kolonnas matricu Y atrod pēc formulas:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_F \mathbf{X}.$$

13. Piemērs.

Ja dots vektors $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ un 12. piemērā definētais operators $\hat{P}_\alpha$, tad vektora

$$\hat{P}_\alpha \mathbf{a} = \mathbf{a}' = a'_x \mathbf{i} + a'_y \mathbf{j} + a'_z \mathbf{k}$$

koordinātas var atrast pēc formulas

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Piezīme.

Bāzē F kā vektora $\mathbf{x}$ koordinātas, tā arī operatora $\hat{A}$ matrica A_F ir noteikta viennozīmīgi. Līdz ar to tiek uzdots piekārtojums, kurš katram vektoram $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ piekārto tā koordinātu kolonnas matricu $X \in \mathbf{R}^{n,1}$ un katram operatoram $\hat{A} \in L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ tā matricu $A_F \in \mathbf{R}^{n,n}$. Šī fakta saīsinātajā pierakstā $\mathbf{x} \xrightarrow{F} X$ un $\hat{A} \xrightarrow{F} A_F$ norāda bāzi F , kura nosaka piekārtojumu. Lai nerastos pārpratumi, atbilstošo bāzi mēdz norādīt kā indeksu pie vektora $\mathbf{x}$ koordinātu matricas, t.i., $\mathbf{x} \xrightarrow{F} X_F$.

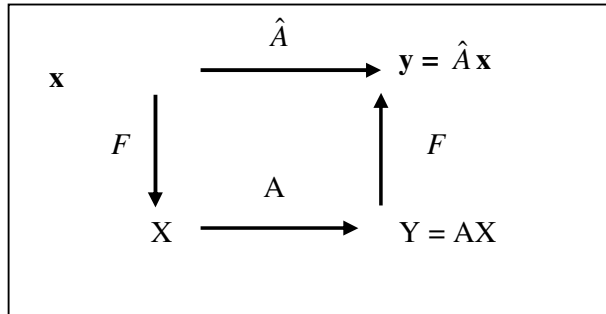
1. TEORĚMA.

Ja lineārā telpā $\mathbf{K}$ dota bāze F , tad eksistē savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp telpām $L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ un $\mathbf{R}^{n,n}$.

Pierādījums°. Pieņemsim, ka dots lineārs operators $\hat{A}$, tad pēc 6. definīcijas bāzē F operatoram $\hat{A}$ tiek viennozīmīgi piekārtota matrica $A_F \in \mathbf{R}^{n,n}$.

Ja dota patvaļīga matrica $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ un bāze F telpā $\mathbf{K}$, tad konstruēsim tādu operatoru $\hat{A} \in L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$, ka šā operatora matrica ir $A_F = A$.

Operatoru $\hat{A}$ atradīsim, vadoties pēc diagrammas



Tā rāda, ka vektoram $\mathbf{x}$ tiek piekārtots vektors $\mathbf{y}$ pēc sekojošas kārtulas:

- 1) vektoram $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ atrodam tā koordinātas $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ bāzē F un pierakstām tās kā kolonnas matricu $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T$;
- 2) sareizinām kolonnas matricu X ar matricu A un atrodam kolonnas matricu $Y = AX$, kuru uzskatām kā kāda vektora $\mathbf{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)^T$ koordinātu kolonnas matricu bāzē F ;
- 3) konstruējam vektoru

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 + \dots + y_n \mathbf{f}_n.$$

Norādīto pārveidojumu rezultātā tiek iegūts operators

$$\hat{A} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}.$$

Tā kā katrs no trim iepriekšējiem pārveidojumiem ir lineārs, tad operators $\hat{A}$ arī ir lineārs, un tā matrica $A_F = A$.•

Piezīme.

Apkopojot iepriekš teikto, resumējam, ka operatora vienādojuma

$$\hat{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Risināšanas teorētiskās un praktiskās problēmas var tikt reducētas uz lineāru vienādojumu sistēmu teorijas atbilstošajām problēmām.

11.4. Darbības ar lineāriem operatoriem

Lineārs operators ir funkcijas jēdziena speciāls gadījums, līdz ar to ar lineāriem operatoriem var viegli izpildīt tās darbības, kuras veic ar funkcijām.

Apzīmēsim ar $\mathbf{L}$ visu to lineāro operatoru kopu, kuri attēlo n – dimensionālu lineāro telpu $\mathbf{K}$ pašu sevī. Tātad $\mathbf{L} = L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

Ja $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbf{L}$, bet α ir skaitlis, tad **darbības ar operatoriem** definēsim sekojoši.

7. Definīcija.

1°. **Operatoru summa:**

$$\hat{A} + \hat{B} := ((\hat{A} + \hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x}).$$

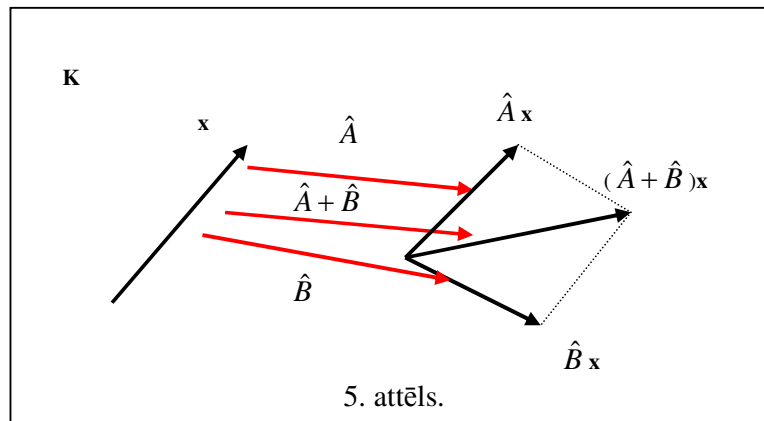
2°. **Operatora reizinājums ar skaitli:**

$$\alpha \hat{A} := ((\alpha \hat{A})\mathbf{x} = \alpha(\hat{A}\mathbf{x})).$$

3°. **Operatoru reizinājums:**

$$\hat{A} \hat{B} := ((\hat{A} \hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}(\hat{B}\mathbf{x})).$$

Divu operatoru summa ir attēlota 5. attēlā. Viegli pārbaudīt, ka iegūtie operatori $\hat{A} + \hat{B}$, $\alpha \hat{A}$, $\hat{A} \hat{B}$ arī ir lineāri operatori, t.i., ir kopas $\mathbf{L}$ elementi.



Pierādīsim, ka $\hat{A} \hat{B} \in \mathbf{L}$. Acīmredzot operators $\hat{A} \hat{B} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$. Ja vektori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{K}$ un α, β ir patvaļīgi skaitļi, tad no iepriekšējās definīcijas un operatoru $\hat{A}$ un $\hat{B}$ linearitātes seko

$$\hat{A} \hat{B} (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \hat{A} (\hat{B} (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y})) = \hat{A} (\alpha \hat{B} \mathbf{x} + \beta \hat{B} \mathbf{y}) = \alpha \hat{A} \hat{B} \mathbf{x} + \beta \hat{A} \hat{B} \mathbf{y}.$$

Tātad operators $\hat{A} \hat{B} \in \mathbf{L}$. Pārējo operatoru piederību kopai $\mathbf{L}$ pierāda analogi.

1. Piezīme.

Kopā $\mathbf{L} = L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ esam definējuši divas operācijas: operatoru summu - $\hat{A} + \hat{B}$ un operatora reizinājumu ar skaitli - $\alpha \hat{A}$. Tātad kopa $\mathbf{L}$ veido lineāru telpu. Tās nulles elements ir nulles operators, bet tās elementa - operatora $\hat{A}$ - pretējais elements ir operators $(-1) \hat{A}$.

2. Piezīme.

Operatora $\hat{A}$ pierakstam lietojam simbolu $\hat{A}^2$. Līdzīgi vispārīgā gadījumā: $\hat{A}^m = \hat{A} \hat{A}^{m-1}$.

Nākošā teorēma parāda saistību starp darbībām ar lineāriem operatoriem un darbības ar to matricām.

2. TEORĒMA.

Ja $F = \{ \mathbf{f}_j \}_1^n$ ir lineāras telpas $\mathbf{K}$ bāze un A_F, B_F ir atbilstošās operatoru $\hat{A}$ un $\hat{B}$ matricas šajā bāzē, tad

- 1°. Vienādu operatoru matricas ir vienādas;
- 2°. Operatora $\hat{A} + \hat{B}$ matrica ir $A_F + B_F$;
- 3°. Operatora $\alpha \hat{A}$ matrica ir αA_F ;
- 4°. Operatora $\hat{A} \hat{B}$ matrica ir $A_F B_F$.

Pierādījums°. Pierādīsim tikai pēdējo apgalvojumu. No formulas (11.5) izriet, ka vektora $\mathbf{x}$ attēla $\hat{A} \hat{B} \mathbf{x} = \hat{A} (\hat{B} \mathbf{x})$ koordinātas bāzē F nosaka matrica $A_F (B_F X) = (A_F B_F) X$ un tā kā operatora matrica dotā bāzē ir noteikta viennozīmīgi, tad secinām, ka operatora $\hat{A} \hat{B}$ matrica ir matrica $A_F B_F$.

Piezīme.

Ņemot vērā savstarpēji viennozīmīgo atbilstību starp lineāro operatoru telpu $\mathbf{L} = L(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ un matricu telpu $\mathbf{R}^{n,n}$, mēs varam jau zināmos rezultātus no matricu algebras pārnest uz lineāro operatoru algebru. Tā, piemēram, jāatzīmē šādas operatoru reizinājuma īpašības:

- 1) operatoru reizinājums **nav komutatīvs**, jo eksistē tādas matricas A, B , ka $AB \neq BA$;
 - 2) operatoru reizinājums ir **asociatīvs**, jo šāda īpašība piemīt matricām, t.i., $A(BC) = (AB)C$.
- Līdzīgi varam turpināt, uzskaitot visas matricu reizinājumu īpašības.

Analogi inversas matricas jēdzienam var definēt arī inverso operatoru.

8. Definīcija.

Operatoru $\hat{H}$ sauc par operatora $\hat{A} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ **inverso operatoru**, ja

$$\hat{H} \hat{A} = \hat{A} \hat{H} = \hat{E}.$$

Parasti operatora $\hat{A}$ inverso operatoru apzīmē ar $\hat{A}^{-1}$. No inversā operatora definīcijas secinām, ka $\hat{A}^{-1} \hat{A} \mathbf{x} = \hat{A} \hat{A}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

3. TEORĒMA.

Ja lineāram operatoram $\hat{A}$ eksistē inversais operators $\hat{A}^{-1}$, tad tas ir lineārs operators.

Pierādījums^o. Ja $\mathbf{y}_1 = \hat{A} \mathbf{x}_1$ un $\mathbf{y}_2 = \hat{A} \mathbf{x}_2$, bet α, β ir patvaļīgi skaitļi, tad, izmantojot operatora $\hat{A}$ linearitāti, iegūstam

$$\begin{aligned} \hat{A}^{-1}(\alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2) &= \hat{A}^{-1}(\alpha \hat{A} \mathbf{x}_1 + \beta \hat{A} \mathbf{x}_2) = \hat{A}^{-1}(\hat{A}(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2)) = \\ &= \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 = \alpha \hat{A}^{-1}(\hat{A} \mathbf{x}_1) + \beta \hat{A}^{-1}(\hat{A} \mathbf{x}_2) = \alpha \hat{A}^{-1} \mathbf{y}_1 + \beta \hat{A}^{-1} \mathbf{y}_2. \end{aligned}$$

Tātad operators $\hat{A}^{-1}$ ir lineārs operators. •

Secinājums.

Ja operatoram $\hat{A}$ eksistē inversais operators $\hat{A}^{-1}$, tad tas ir lineārs operators, un tam atbilst operatora matrica A_F^{-1} bāzē F . Atbilstoši operatoru vienādībai

$$\hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{E}$$

no 2. teorēmas seko atbilstošo matricu vienādība. Tādējādi, ja A_F ir operatora $\hat{A}$ matrica bāzē F , tad

$$A_F^{-1} A_F = E.$$

Pēdējā vienādība rāda, ka inversā operatora $\hat{A}^{-1}$ matrica A_F^{-1} ir inversa operatora $\hat{A}$ matricai A_F . Jāatzīmē, ka šajā gadījumā matrica A_F ir nesingulāra ($\det A_F \neq 0$).

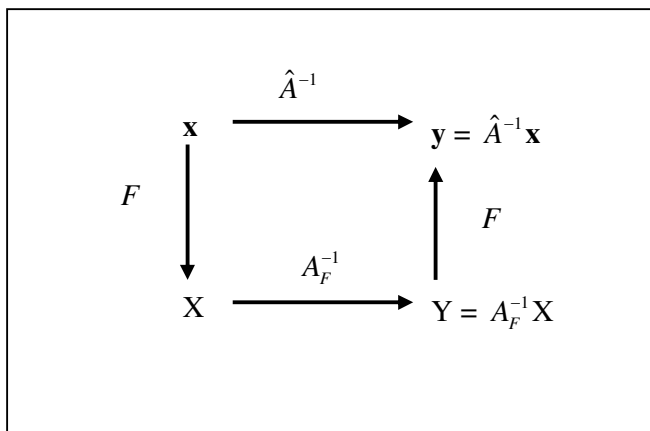
Līdz ar to varam formulēt inversā operatora eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu.

4. TEORĒMA.

Lineāra operatora $\hat{A}$ inversais operators eksistē tad un tikai tad, ja tā matrica ir nesingulāra.

^oNepieciešamības **pierādījums** aplūkots iepriekšējās teorēmas secinājumā.

Pierādot pietiekamību, ņemam vērā, ka lineāram operatoram $\hat{A}$ bāzē F eksistē nesingulāra matrica A_F . Līdz ar to šai matricai eksistē inversā matrica A_F^{-1} . Tagad inverso operatoru $\hat{A}^{-1}$ varam uzdot ar diagrammu:



Šādi konstruētais operators $\hat{A}^{-1}$ ir operatora $\hat{A}$ inversais operators, jo pēc formulas (11.5) secinām, ka vektoru $\mathbf{x}$ operators $\hat{A} \hat{A}^{-1}$ attēlo par pašu vektoru $\mathbf{x}$, t.i.,

$$A_F A_F^{-1} X = EX = X.$$

Atzīmēsim vēl vienu, jau matemātiskajā analizē aplūkoto un pierādīto inversā operatora (funkcijas) eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu.

5. TEORĒMA.

Operatora $\hat{A}$ inversais operators eksistē tad un tikai tad, ja operators $\hat{A}$ ir savstarpēji viennozīmīgs (bijektīvs) attēlojums.

Secinājums.

Balstoties uz pēdējo teorēmu, varam secināt, ka abi operatori: gan $\hat{A}$, gan inversais operators $\hat{A}^{-1}$, par nulles vektoru attēlo tikai pašu nulles vektoru, tātad

$$\text{Ker } \hat{A} = \{\mathbf{0}\}.$$

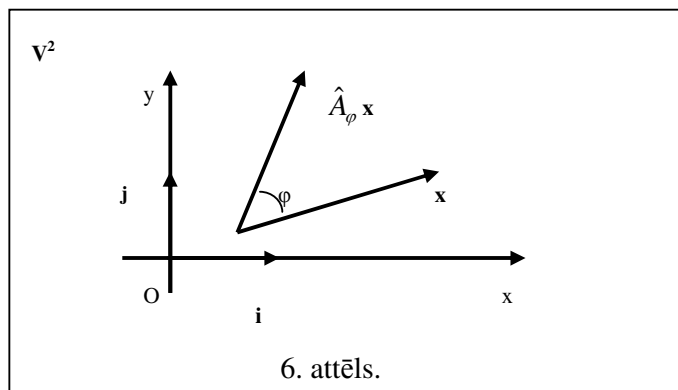
Piezīme.

Lineāru telpu $\mathbf{K}$ un $\mathbf{V}$ izomorfisma definīcijā dotais attēlojums $F: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{V}$ ir lineārs operators, kurš nodibina savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp abu telpu vektoriem.

Lietojot matemātiskās analīzes terminoloģiju, var teikt, ka operators F ir izomorfisms, ja tas vienlaicīgi ir lineārs un bijektīvs attēlojums.

14. Piemērs.

Aplūkosim operatoru $\hat{A}_\varphi: \mathbf{V}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2$, kurš katru plaknes vektoru pagriež par leņķi φ . Šo operatoru sauc par **rotācijas operatoru** (sk. 6. att.).



Operators $\hat{A}_\varphi$ ir lineārs operators, jo pagriežot vektorus $\mathbf{x}_1$ un $\mathbf{x}_2$ par leņķi φ , arī šo vektoru summa un reizinājums ar skaitli pagriežīsies par šo pašu leņķi.

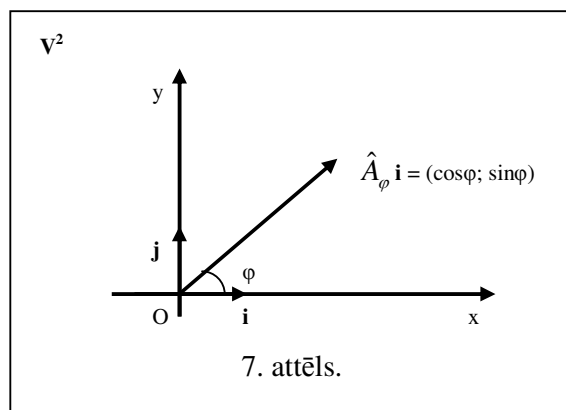
Lai atrastu operatora $\hat{A}_\varphi$ matricu kanoniskajā bāzē $E = \{\mathbf{i}; \mathbf{j}\}$, izmantojam 7. attēlu. Bāzes vektoru attēlus izteiksim šādi:

$$\hat{A}_\varphi \mathbf{i} = \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j},$$

$$\hat{A}_\varphi \mathbf{j} = -\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j}.$$

Tātad operatora $\hat{A}_\varphi$ matrica ir sekojoša matrica

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$



Tā kā $\det A_\varphi = 1$, tad eksistē inversais operators $\hat{A}_\varphi^{-1}$, kura matrica ir vienāda ar A_φ inverso matricu

$$A_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Inversais operators izdara pagriezienu par leņķi $-\varphi$, tāpēc pastāv sakarība

$$\hat{A}_\varphi^{-1} = \hat{A}_{-\varphi}.$$

Jāpiezīmē, ka viegli varam atrast divu rotācijas operatoru $\hat{A}_\varphi$ un $\hat{A}_\psi$ reizinājuma matricu ($\hat{A}_\varphi \hat{A}_\psi = \hat{A}_{\varphi+\psi}$)

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\varphi+\psi} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11.5. Operatora matricas maiņa, pārejot uz jaunu bāzi

Analogi tam, kā vektora koordinātas ir atkarīgas no bāzes izvēles, vienam un tam pašam operatoram dažādās bāzēs atbilst dažādas matricas. Atradīsim sakarību starp šīm operatora matricām dažādās bāzēs.

Lineārajā telpā $\mathbf{K}$ izvēlamies divas bāzes $F = \{ \mathbf{f}_j \}_1^n$ un $G = \{ \mathbf{g}_j \}_1^n$ ar pārejas matricu U no bāzes F uz bāzi G . Pieņemsim, ka $\mathbf{y} = \hat{A} \mathbf{x}$, un pierakstīsim šo sakarību vektoru $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$ koordinātām matricu formā abās bāzēs:

$$Y_F = A_F X_F, \quad (11.6)$$

$$Y_G = A_G X_G. \quad (11.7)$$

Vektoru $\mathbf{x}$ un $\mathbf{y}$ koordinātas abās bāzēs saista pārejas matrica U :

$$X_F = U X_G, \quad Y_F = U Y_G.$$

Ievietojot šīs sakarības vienādībā (11.6), iegūstam matricu vienādību

$$U Y_G = A_G U X_G.$$

Ievērojot vienādību (11.7) un faktu, ka pārejas matricai U vienmēr eksistē inversā matrica U^{-1} , iegūstam matricu vienādību

$$A_G X_G = U^{-1} A_F U X_G,$$

kuru varam iztulkot kā matricām atbilstošo operatoru vienādību, kad šie operatori attēlo vienu un to pašu vektoru x .

Mēs izvēlējamies patvaļīgu vektoru x , tāpēc no vienādu operatoru definīcijas seko, ka

$$A_G = U^{-1} A_F U.$$

1. Secinājums (par operatora matricas maiņu).

Ja A_F un A_G ir lineārā operatora $\hat{A}$ matricas bāzēs F un G , bet U ir pārejas matrica no bāzes F uz bāzi G , tad

$$A_G = U^{-1} A_F U.$$

Iegūto vienādību var aplūkot kā sakarību starp patvaļīgām kvadrātiskām matricām. Matricu teorijā tai ir speciāls nosaukums.

9. Definīcija.

Kvadrātiskas matricas A un B sauc par **līdzīgām**, ja eksistē tāda nesingulāra kvadrātiska matrica U , ka

$$B = U^{-1} A U.$$

Terminā – līdzīgas matricas – pirmo vārdu skaidro tādējādi, ka abām matricām ir kopīgas īpašības. Tā, piemēram, divas līdzīgas matricas vienmēr var traktēt kā kāda lineāra operatora matricas divās dažādās bāzēs. Tātad līdzīgu matricu kopīgās īpašības ir saistītas ar paša lineārā operatora īpašībām.

Ja $B = U^{-1} A U$, tad no teorēmas par matricu reizinājuma determinantu seko, ka

$$\det B = \det (U^{-1} A U) = \det U^{-1} \det A \det U = \det A.$$

2. Secinājums.

Lineāra operatora matricas determinants nav atkarīgs no bāzes izvēles.

Ņemot vērā pēdējo secinājumu, definēsim operatora determinantu.

10. Definīcija

Par **lineāra operatora $\hat{A}$ determinantu** sauc šā operatora matricas A_F determinantu patvaļīgā bāzē F :

$$\det \hat{A} := \det A_F.$$